INESTABILIDADES HIDRODINÁMICAS
Problemas de la Práctica 1

DCFyA-UNCPBA
Docente: Dr. Alejandro G. González

13 de septiembre de 2015

1 INTRODUCCIÓN

Problema 1

Dado el sistema descripto por las ecuaciones

$$x' = 4y^2 - x^2, \tag{1.1}$$
$$y' = 2y - 3, \tag{1.2}$$

halle los puntos fijos, determine la estabilidad lineal, y clasifique cada punto fijo.

Problema 2

Estudie la estabilidad la estabilidad lineal de un sistema que satisface la siguiente ecuación

$$x'' = (x + \mu)(x^2 - 2\mu). \tag{1.3}$$

Analice además las posibles bifurcaciones.

Problema 3

La ecuación del péndulo $\theta'' + \omega^2 \sin\theta = 0$ puede aproximarse para valores moderados de la amplitud por

$$\theta'' + \omega^2 \left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3\right) = 0. \tag{1.4}$$

Grafique el diagrama de fases para este modelo y compare con el de la ecuación original, explicando las diferencias.

Problema 4

Un modelo simple de los latidos cardíacos está dado por

$$x' = -a(x^3 - bx + y), \tag{1.5}$$
$$y' = x - c, \tag{1.6}$$

con x la compresión de una fibra muscular e y un control electroquímico. Discuta el equilibrio cuando $a = 100$, $b = 1$ y $c = 1{,}1$. Dibuje las trayectorias de fase.

Problema 5

sea un sistema de huéspedes con una población $H(t)$ y de parásitos con otra $P(t)$ que se pueden describir aproximadamente por el sistema

$$\frac{dH}{dt} = (\alpha - \beta P)H, \tag{1.7}$$

$$\frac{dP}{dt} = \left(\gamma - \delta \frac{P}{H}\right) P, \quad H > 0, \tag{1.8}$$

que posee constante α, β, γ y δ positivas. Use un cambio de escala para reducir el número de parámetros usando variables x e y proporcionales a P y H respectivamente. Halle y clasifique los puntos fijos del problema reducido. Para $\gamma/\alpha = 0{,}5$ dibuje las líneas de flujo a lo largo dela direcciones (a) $y = x$, (b) $x = 1$, (c) $x = 0$ y (d) $y = \beta x$.

Problema 6

Estudie la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema

$$x'' = (x - \lambda)(x^2 - \lambda). \tag{1.9}$$

Problema 7

Encuentre el equilibrio estable del problema de una pompa de jabón entre dos anillos paralelos. Halle la fuerza en esa situación que ejerce la pompa sobre los anillos y discuta los resultados.

Problema 8

Deduzca detalladamente los resultados discutidos en la teórica para el crecimiento transitorio.

Problema 9

Considere el siguiente sistema dinámico

$$\frac{dx}{dt} = A\,x, \qquad A = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 1 \\ 0 & -\epsilon_2 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

dónde ϵ_1 y ϵ_2 son dos parámetros positivos pequeños asociados con la condición inicial $x_0 = (x_{10}, x_{20})$.

1. Halle los valores y vectores propios e_i del sistema.
2. Defina la energía del sistema como $E(t) = x(t)\cdot x(t)$ y asuma sin pérdida de generalidad que $E(0) = 1$. ¿Por qué puede hacer esto? Halle una expresión de la energía en función de las condiciones iniciales $x(0) = y_{10}e_1 + y_{20}e_2$ y $p = e_1 \cdot e_2$.
3. Encuentre la ecuación bicuadrática para la condición inicial y_{20} que hace extreno a $E(t)$.
4. Calcule las raíces relevantes suponiendo que $\epsilon_{1,2} << 1$ y obtenga a los órdenes más bajos significativos a y_{10}.

5. ¿A cuál de estas condiciones corresponde la ganancia óptima? Obtenga la expresión dada en la clase teórica para para la ganancia a tiempos grandes y grafique su logaritmo en función del tiempo para (a) un único modo inestable y (b) la excitación óptima.

6. Discuta los resultados.