INESTABILIDADES HIDRODINÁMICAS
Problemas de la Práctica 2

DCFyA-UNCPBA
Docente: Dr. Alejandro G. González

24 de septiembre de 2015

INESTABILIDADES GRAVITACIONALES

Problema 1

Considere dos medios de densidad constante e igual viscosidad cinemática que ocupan respectivamente espacios semi-infinitos y que están separados por una interfaz plana perpendicular a la gravedad. Suponga que hay una tensión superficial y que el fluido de arriba es más pesado que el inferior.

1. Halle los modos lineales estables e inestables.
2. Calcule el valor de estabilidad marginal y verifique si depende de la viscosidad.
3. Haga lo mismo para el modo de máxima tasa de crecimiento.
4. Estudie las distancias de penetración y comportamientos de flujo de los modos reptantes y viscosos y explique sus diferentes tasa de decaimiento.

Problema 2

Considere dos medios líquidos de densidad constante pero sin viscosidad. El líquido superior tiene un espesor h en el equilibrio y arriba de él hay aire. El inferior se extiende hacia abajo hasta una distancia que puede considerase mucho mayor que h (es decir se la puede suponer semi-infinita) La interfaz entre líquidos es plana y perpendicular a la gravedad. Suponga que la tensión superficial no puede despreciarse y que el fluido de arriba es más pesado que el inferior.

1. Halle los modos lineales estables e inestables.
2. Calcule el valor de estabilidad marginal.
3. Haga lo mismo para el modo de máxima tasa de crecimiento. Discuta el resultado.
4. Halle la relación entre la amplitud de la perturbación en la interfaz de separación líquido-aire y la existente entre ambos líquidos. Describa el comportamiento de los modos posibles.

Problema 3

Repita el problema anterior pero suponga ahora que el líquido inferior ocupa una región de espesor H y el piso es plano, rígido e impermeable, mientras que sobre la capa superior en lugar de aire hay un techo de las misma características que el piso. ¿Qué diferencias observa entre los resultados de ambos problemas?

Problema 4

Estudie la estabilidad lineal y los modos correspondientes a perturbaciones de una capa líquida fina aplicada sobre el techo de una habitación.

Problema 5

Deduzca en forma completa el principio energético discutido en la clases teóricas. Analice las condiciones de estabilidad y relacione los resultados con los del problema 1.

Problema 6

Considere un modo complejo

$$A = A_0(y) \exp(\imath \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + nt), \tag{6.1}$$

donde n puede ser complejo y A es un vector que incluye las variables como la presión, la velocidad, la vorticidad, etc. de las perturbaciones lineales. Cualquier cantidad real entonces podrá expresarse como

$$a = a_r \Re(A) + a_i \Im(A), \tag{6.2}$$

con $a_{r,i}$ reales. De esta forma habrá dos tipos de términos en cualquier ecuación de energía: (i) los que tienen productos relacionados con las partes reales o las imaginarias de A exclusivamente y (ii) las que tiene productos de partes reales e imaginarias. Los términos correspondientes al punto (i) dan el principio energético obtenido en el problema anterior cuando se hace un promedio sobre celdas de tamaño λ_x y λ_z. ¿Qué dan los correspondientes al punto (ii) y cuál es el significado físico del resultado cuando los modos tienen un n complejo, i.e. existen modos oscilatorios amortiguados?

Problema 7

Considere la ecuación de la cantidad de movimiento del problema 1 para los modos normales y asuma que existen dos soluciones: una correspondiente a (p_i, v_{yi}) y otra (p_j, v_{yj}) (dos modos). Pruebe que

$$\int_a^b v_{yj} D p_{1i} = \int_a^b p_{1j} D v_{yj}, \tag{7.1}$$

con a y b paredes, rígidas e impermeables. Multiplique las ecuaciones para (p_i, v_{yi}) por la velocidad v_{yj} y haga lo mismo cambiando i por j. Reste ambas ecuaciones y construya expresiones simétricas.

1. Suponga dos modos tales que sus dependencias temporales $\exp(n_{i,j}t)$ sean $n_i \neq n_j$ y $n_i = n_j*$ dónde $*$ indica que es el complejo conjugado. Halle las condiciones para que no existan modos con n complejos. Explique el resultado para la determinación de condiciones de estabilidad.

2. Si existe n complejo, demuestre que los modos son oscilatorios amortiguados siempre.

3. Compare con las expresiones obtenidas con las resultantes del estudio energético hecho en la clase teórica y explique el significado de cada término obtenido.